ФУНКЦИЯ ВЫБОРА ПРИ АГРЕГИРОВАНИИ ИНРАНЖИРОВАНИЙ

Е.Ю. Емельянова
Томский политехнический университет
E-mail: zeta@tpu.ru

В статье приведены результаты изучения особенностей функций выбора (правила Борда, Кондорсе, Кемени, Парето и др.) и эффективность их применения для нахождения ранжирования консенсуса в случае, когда входной профиль представлен инранжированиями.

Введение

Для решения проблемы агрегирования предпочтений наряду со статистическими методами, следует отметить аксиоматический подход, который появился в теории общественного выбора благодаря К. Эрроу [1, 2]. Теорема К.Эрроу говорит о том, что невозможно найти такую функцию выбора, чтобы всегда соблюдались все следующие элементарные правила коллективного принятия решений: транзитивность; Парето-эффективность; отсутствие диктатуры; независимость от посторонних альтернатив. Соответственно вопрос о существовании подобной функции выбора, удовлетворяющей одновременно всем сформулированным К. Эрроу аксиомам, является актуальным в настоящее время.

Общая методология решения проблемы группового выбора с точки зрения теории принятия решений предполагает задание такой *функции выбора* f, которая исходному множеству индивидуальных предпочтений $\Lambda(m, n) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ ставит в соответствие одно единственное групповое предпочтение β_{fin}. Вопросы существования и свойств таких функций исследовались многими учеными [1, 2]. Следует отметить, что в большинстве случаев, попытки построения функции группового выбора f, как правило, приводили либо к её неоднозначности (множественность *ранжирований Кемени*), либо к доказательству того, что при постулированных условиях таковой функции не существует вовсе (теорема К.Эрроу «*О невозможности*»). Одним из вариантов решения является расчет среднего значения или медианы, однако их определение не всегда является однозначным, достоверным и надежным. Альтернативный вариант, рассматривать множество всех ранжирований Кемени с учетом особенностей исходной совокупности данных, на основе которой формируется множество $\Lambda(m, n)$, достоинств и недостатков используемой функций выбора f. При этом описание и учет особенностей входного и выходного профилей вызывает ряд существенных аналитических трудностей.

В этой связи рассматривать общую проблему группового выбора представляется целесообразным посредством исследования и решения двух задач: рассмотрение свойств и особенностей топологии анализируемых структур и построение функции группового выбора, учитывающей особенности задачи выбора.

Функция группового выбора

Согласно теории множеств, аксиома выбора предполагает, что существует *функция выбора f*, которая каждому множеству xi семейства непустых множеств X сопоставляет один из элементов этого множества. Семейство S – семейство непустых множеств, проиндексированных множеством действительных чисел □, т.е. для каждого действительного числа i существует множество Si, при чем, каждое S_i непустое и, возможно, бесконечное. В конкретной ситуации выбора избирателю предлагается на выбор некоторое непустое подмножество $A \subset X$ (предъявление), т.е. избиратель выбирает некоторое подмножество из A. Каждое подмножество является частью пространства слабых порядков Ω_0, обладающего определенными свойствами [2].

Целью задачи выбора может быть: выбор подмножества из множества всех подмножеств 2^A (общий случай), выбор подмножества из какой-либо допустимой части множества всех подмножеств 2^A или выбор единственной наилучшей альтернативы a_k из A, где $k = 1, \ldots n$ (частные случаи). В зависимости от случая, согласно теории социального выбора существует градация функций выбора f, которая предполагает многозначные соответствия группового выбора и однозначное отображение соответственно [3].

Пусть множество А считается заданным, четко очерченным, конечным множеством альтернатив А = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Согласно теории измерений, декартово произведение множеств как одна из операций над множествами позволяет ввести формальное определение *бинарного* отношения. Бинарное отношение λ называется отношением слабого предпочтения на множестве A, если для любых $(a_i, a_j) \in A$ выполняется либо $a_i\lambda a_j$, либо $a_j\lambda a_i$. Множество всех упорядоченных пар (a_i, a_j), где $(a_i, a_j) \in A$ обозначается $A\times A = A^2$. Любое подмножество декартова квадрата A^2 определяет некоторое бинарное отношение λ на множестве A, т.е. $\lambda \subseteq A^2$. Пространство бинарных отношений с носителем A будем называть произвольным подмножеством множества всех бинарных отношений на A. В силу того, что мы работаем с определенной спецификой бинарных отношений, *инранжирования*, при рассмотрении свойств и особенностей топологии анализируемых структур необходимо учитывать различные подмножества и их комбинаторные свойства. Пространство слабых порядков Ω_0, которое содержит в себе подпространство Ω_1, подпространство порядков с единственным символом строгого порядка, подпространство инранжирований Ω_2 и подпространство строгих порядков Ω_3 приведены на рисунке.

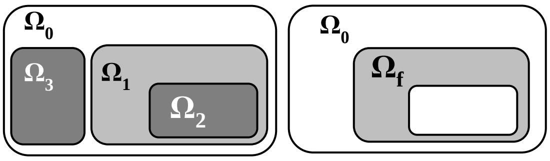

Рис. 1. Вложенность пространств Ω_0, Ω_1, Ω_2, Ω_3 и Ω_f

С помощью определенного механизма выбора реализуем выбор одной или нескольких альтернатив a_i из A. Механизм выбора определяется структурой S входного профиля $\Lambda(m, n)$, конкретным *правилом выбора* L, которое позволяет совершать выбор, на основе существующей структуры S и соответствующей функции выбора f. Структура S определяется типами отношений предпочтения на множестве возможных альтернатив $A= \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, которые задаются свойствами бинарных отношений. При этом проблема, связанная с A, а именно, способ формирования множества A, из которого приходится выбирать, играет роль, возможно даже большую, чем выбор в рамках A. Структура S может создаваться путем формулирования принципов, определяющих условия, на которых возможно сравнение альтернатив по качеству. В большинстве случаев принципы описываются бинарными отношениями или правилами их построения.

Правилом выбора L будем называть любое однозначное отображение отношения предпочтения λ_k в коллективное упорядочение альтернатив $\Lambda(m, n)$. Под *коллективным* упорядочением альтернатив понимается общий выбор множества избирателей $V = \{v_1, v_2, ..., v_k, ..., v_m\}$, т.е. результат агрегирования индивидуальных предпочтений избирателей, который представляется в виде входного профиля предпочтений $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, \dots, \lambda_m\}$. Целью агрегирования $\Lambda(m, n)$ является определение единственного ранжирования консенсуса β для m ранжирований (избирателей) n альтернатив, представляющего собой интегральную характеристику профиля $\Lambda(m, n)$.

Функция выбора f реализуется с помощью механизмов выбора, зависящих от $f = (S, L)$. Функцией выбора f называется отображение, которое ставит в соответствие каждому профилю предпочтения $\Lambda_i(m, n)$ подмножество $F(\Lambda_i(m, n))$ из A, т.е.

f: {профили предпочтения} $\to A$.

Любой элемент $\in F(\Lambda_i(m, n))$ разрешается в качестве выбора при профиле $\Lambda_i(m, n)$, однако мощность $|F(\Lambda_i(m, n))| \neq |\Lambda_i(m, n)|$ [4].

Для того чтобы функция выбора f была оптимальной и единственной, она должна обладать рядом свойств, а именно она должна быть анонимной, нейтральной, согласованной, достоверной и обладать свойством отмены [2, 3]. Функция выбора f определяет качество работы алгоритма и влияет на такие параметры оценки как точность, быстродействие, робастность и достоверность. В случае, когда $\Lambda(m, n)$ представлен исключительно инранжированиями выявлено, что кратные повторения λ_k не изменят β_{fin}, однако влияют на значения элементов матрицы профиля предпочтений $P=[p_{ij}]$, изменяя функцию расстояния, что отрицательно сказывается на быстродействии нахождения и качестве $B(N, n) = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_N\}$.

Задача о нахождении ранжирования Кемени является NP-полной и решается полным перебором. Однако мы можем ограничить область пространства рассматриваемых ранжирований спецификой структуры входных данных, образованных интервалами. Задача возможно и не перейдет из класса NP-полных, но существенное сокращение подпространств для перебора в определенных ситуациях очевидно. С учетом этого проведен анализ существующего алгоритма нахождения ранжирования консенсуса по правилу Кемени RECURSALL, которое определяет все возможные оптимальные решения и представляет в виде выходного профиля $B(N, n) \subset \Pi_n$. Методологическая особенность предложенной модификации алгоритма, с учетом специфической структуры инранжирований, состоит в том, что поиску единственного группового решения β_{fin} сначала предшествует построение множества «допустимых» групповых решений $B(N, n)$, удовлетворяющих принципу Парето. Выбор единственного группового решения β_{fin} производится уже из построенного множества допустимых групповых решений $B(N, n)$. Поэтому, если применить правило Борда к выходному профилю $B(N, n)$, обладающему рядом особенностей и являющемся результатом работы правила Кемени, то итоговое решение β_{fin} будет единственным и точным. Использование процедуры свёртки на основе правила Борда, описанной в [2], позволяет получить единственное оптимальное ранжирование консенсуса β_{fin}, которое может включать как инранжирования, так и произвольные отношения слабого порядка, $\beta_{\text{fin}} \notin \Pi_n$ при этом будет являться самой точной характеристикой для исходного профиля предпочтений $\Lambda(m, n)$, представленного гетероскедастичными данными и/или инранжированиями.

Работы проводились в рамках гранта РНФ № 18-19-00203 «Агрегирование предпочтений для решения задач обработки многомерных гетероскедастичных измерительных данных» (НИР ТПУ № 4.1959.РНФ.2018)

Список использованных источников

1. Young H. Peyton Optimal voting rules, Journal of Economic Perspectives, 1995, pp. 51–64.
2. Muravyov S.V., Baranov P.F. and Emelyanova E.Y. 2019 How to transform all multiple solutions of the Kemeny Ranking Problem into a single solution J.Phys.Conf.Series 1379 012053.
3. Кузьмин В.Б. Построение групповых решений в пространствах четких и нечетких бинарных отношений //М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 168 с.